MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 2
28.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen partiell differenzierbar sind, und bestimmen Sie ihre partiellen Ableitungen:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2\,x_1 - x_2)^3$

   b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2$

   c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2)\,e^{x_1^2+x_2^2}$

   d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad k(x_1, x_2) = x_2\,\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   a) Zeigen Sie, daß f stetig ist.

   b) Zeigen Sie, daß f partiell differenzierbar ist.

   c) Untersuchen Sie, ob f kritische Stellen besitzt.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \arctan\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Zeigen Sie, daß die partielle Ableitung von f nach der 1. Variablen im Punkt $(0,0)$ existiert und bestimmen Sie diese.

4. Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g,\ h : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche beide auf $]a,b[$ stetig differenzierbar sind. Ferner gelte $g(a) = g(b)$ und $h(a) = h(b)$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f :]a,b[\times]a,b[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y),$$

   mindestens eine kritische Stelle besitzt.

Für die Tutorien vom 28.10. und 30.10.19